

# AG-ESO-FORTBILDUNG 2015

## "Sternentwicklung"

### Aufgaben zu Schwarzen Löchern

von Andreas Müller

## Rechenaufgaben für den Schulunterricht

### Aufgabe 1) Schwarze Löcher im Sonnensystem

Schwarze Löcher sind extrem kompakte Masse, im Prinzip, das kompakteste, was man sich vorstellen kann. Denn die Masse des Lochs steckt tief im Innern in der Krümmungssingularität im Zentrum des Lochs bei Radius null. Die einfachste Form Schwarzer Löcher wird durch eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichung beschrieben, die 1916 Karl Schwarzschild entdeckte. Er löste die Feldgleichung für den Vakuumfall (verschwindender Energie-Impuls-Tensor) mit einem kugelsymmetrischen Ansatz. Diese (äußere) Schwarzschild-Lösung ist statisch und enthält einen charakteristischen Radius, den Schwarzschild-Radius, der so etwas wie die Größe Schwarzer Löcher beschreibt. Es handelt sich dabei um den Horisonradius, ab dem ein Schwarzes Loch absolut schwarz sein muss, weil ab dem Schwarzschild-Radius selbst das Licht nicht mehr entkommen kann.

a) Berechne den Schwarzschild-Radius  $R_S = 2 GM/c^2$  unter Verwendung der Newtonschen Gravitationskonstante  $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c = 299792,458 \text{ km/s}$  für die Lochmassen

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 \times 10^7 M_\odot, \\ M_2 &= 1 \times 10^9 M_\odot, \\ M_3 &= 2 \times 10^9 M_\odot, \\ M_4 &= 1 \times 10^{10} M_\odot. \end{aligned} \quad \text{Hierbei gilt: } M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

b) Zeichne maßstabsgetreu die Bahnorbits der Planeten Merkur bis Pluto. Zeichne in dieses Sonnensystem die Schwarzen Löcher mit den Massen  $M_1$  bis  $M_4$  maßstabsgetreu ein.

**Anmerkung:** Die Masse  $M_4$  wurde mit Bedacht gewählt, denn sie entspricht gerade der Größenordnung für die astronomisch beobachtete Maximalmasse Schwarzer Löcher. So hat das supermassereiche Schwarze Loch in der elliptischen Galaxie M87 im Virgohaufen eine Masse von sechs Milliarden Sonnenmassen.

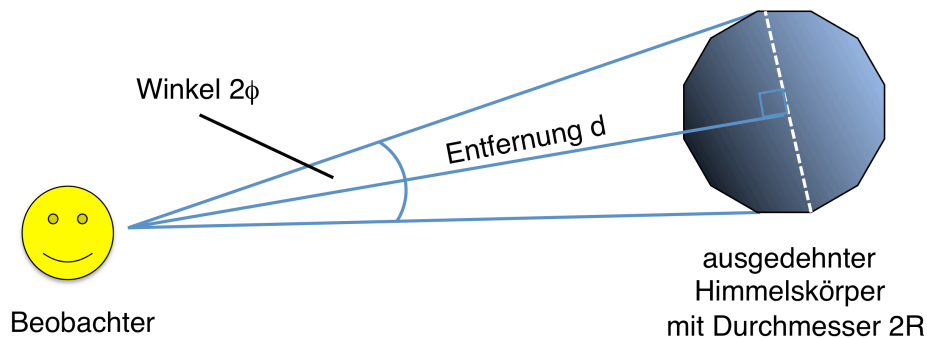
### LÖSUNGEN:

a) Siehe auch Exceldatei "SchwarzeLöcher-im-Sonnensystem.xlsx"

$$\begin{aligned} R_S(M_1) &= 5,9 \times 10^7 \text{ km} = 0,39 \text{ AU}, \\ R_S(M_2) &= 2,9 \times 10^9 \text{ km} = 19,7 \text{ AU}, \\ R_S(M_3) &= 5,9 \times 10^9 \text{ km} = 40,4 \text{ AU}, \\ R_S(M_4) &= 2,9 \times 10^{10} \text{ km} = 196,9 \text{ AU}. \end{aligned}$$

b) Siehe Folie 10 im Powerpoint zu "Schwarzen Löchern".

## Aufgabe 2) Parallaxe und scheinbare Größe Schwarzer Löcher



$$\tan \phi = R/d \rightarrow \phi = \arctan R/d$$

- a) In welcher Entfernung  $d$  erscheint von einem Beobachter ein Tennisball mit  $R = 3,5$  cm Radius so groß wie der Vollmond (scheinbare Größe  $\phi = 0,5^\circ$ )?
- b) In welcher Entfernung  $D$  ist ein  $L = 2,1$  m großer Mann so groß wie ein  $l = 70$  cm großes Kind, das  $d = 3$  m entfernt steht?
- c) Welche scheinbare Größe hat der Ereignishorizont des supermassereichen Schwarzen Loches mit 4 Millionen Sonnenmassen Masse im Zentrum der Milchstraße in  $d = 8$  kpc Entfernung? (Der Radius  $R$  des Ereignishorizontes eines nicht rotierenden Loches mit Masse  $M$  berechnet sich gemäß  $R = 2GM/c^2$  mit der Newton'schen Gravitationskonstante  $G$  und der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$ . Weiterhin gilt für die Entfernungseinheit "Parsec":  $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ Lj.}$ )
- d) In welcher Entfernung  $d$  erscheint der Tennisball aus Aufgabe 1a so groß wie das Schwarze Loch in Aufgabe 1c?

### LÖSUNGEN:

- a) Wie man sich anhand der Trigonometrie des Problems klar macht gilt:

$$d = 0,5 D / \tan(\phi/2) = 3,5 \text{ cm} / \tan(0,25^\circ) = 8,02 \text{ m}$$

- b)

$$\phi_{\text{Kind}} = \arctan(l/d). \text{ Außerdem gilt: } \phi_{\text{Mann}} = \arctan(L/D) \text{ und } \phi_{\text{Kind}} = \phi_{\text{Mann}}$$

$$D = L / \tan[\arctan(l/d)] = L/l \times d = (2,1 \text{ m} / 0,7 \text{ m}) \times 3 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

Das folgt natürlich viel schneller mit dem Strahlensatz  $l/d = L/x$ .

- c) Zunächst berechnen wir den Ereignishorizont:

$$R = 2GM/c^2 = 2 \times 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times 4 \times 10^6 \times 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} / (299.792.458 \text{ m/s})^2 = 1,2 \times 10^{10} \text{ m} = 0,1 \text{ AU}$$

Nun die halbe scheinbare Größe:

$$\phi_{\text{Loch}} = \arctan(R/d) = \arctan [1,2 \times 10^{10} \text{ m} / (8 \text{ kpc})] = \arctan [1,2 \times 10^{10} \text{ m} / (2,5 \times 10^{20} \text{ m})] = \arctan(4,8 \times 10^{-11}) = 2,8 \times 10^{-9} \text{ }^\circ = 9,9 \times 10^{-6} \text{ ''} = 9,9 \text{ } \mu\text{as}$$

Die scheinbare Größe ist gerade das Doppelte des Winkels  $\phi_{\text{Loch}}$  (s. Abb.) und somit  $19,8 \text{ } \mu\text{as}$ .  
Anm.: mas = milli arcseconds = Millibogensekunden;  $\mu\text{as}$  = micro arcseconds = Mikrobogensekunden

d)

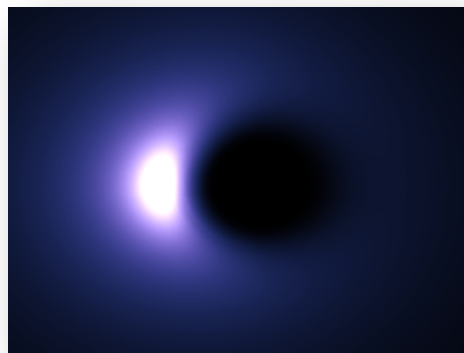
$$d = 0,5 D / \tan(\phi_{\text{Loch}}) = 3,5 \text{ cm} / \tan(2,8 \times 10^{-9} \text{ }^\circ) = 7,2 \times 10^{10} \text{ m} = 72 \text{ Mio. km} \approx 0,5 \text{ AU}$$

Der Tennisball müsste ungefähr so weit entfernt liegen, wie die Hälfte des mittleren Abstand der Erde von der Sonne, damit er so groß erscheint, wie das supermassereiche Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße.

### Aufgabe 3) Bestimmung der Lochmasse aus der scheinbaren Größe eines schwarzen Flecks

Im Jahr 2020 gelingt es Radioastronomen erstmals den schwarzen Fleck des supermassereichen Schwarzen Lochs in der aktiven Galaxie M87 (Virgo-Haufen) aufzulösen und zu fotografieren. Seine scheinbare Größe beträgt nur  $1,4 \times 10^{-5}$  Bogensekunden ("), also  $14 \text{ } \mu\text{as}$  ( $1 \text{ } \mu\text{as} = 10^{-6} \text{ as} = 10^{-6} \text{ ''}$ , eine Mikrobogensekunde).

Berechne aus der bekannten Entfernung des Systems ( $d = 54 \text{ Mio. Lj}$ ) und der Annahme, dass das Schwarze Loch vom Schwarzschild-Typus sei die Masse des Schwarzen Loches.



#### LÖSUNG:

Mit der Definition der scheinbaren Größe (Aufgabe 2) ist der Winkel nur halb so groß wie die scheinbare Größe von  $14 \text{ } \mu\text{as}$ , demnach  $\phi_{\text{Loch}} = 7 \times 10^{-6} \text{ ''}$ . Somit folgt der Radius des Schwarzen Loches zu:

$R = d \times \tan(\phi_{\text{Loch}})$ , wobei  $\phi_{\text{Loch}}$  der halben scheinbaren Größe entspricht. Wir berechnen:

$$R = d \times \tan(\phi_{\text{Loch}}) = 5,4 \times 10^7 \text{ Lj} \times \tan(7 \times 10^{-6} \text{ ''}) = 5,4 \times 10^7 \times 9,5 \times 10^{15} \text{ m} \times \tan(7 \times 10^{-6} \times 1^\circ / 3600) = 5,4 \times 10^7 \times 9,5 \times 10^{15} \text{ m} \times 3,4 \times 10^{-11} = 1,7 \times 10^{13} \text{ m} = 115,6 \text{ AU}$$

Dies ist der Radius  $R$  des Ereignishorizonts. Unter der Annahme, dass dieses Schwarze Loch vom Schwarzschild-Typ ist, berechnet sich die Masse aus dem Schwarzschild-Radius gemäß

$$M = R c^2 / (2G) = 1,1 \times 10^{40} \text{ kg} = 5,7 \times 10^9 M_\odot, \text{ also knapp 6 Mrd. Sonnenmassen}$$

## Aufgabe 4) Das superschwere Schwarze Loch in der Milchstraße



Die Kepler-Gesetze sind benannt nach dem deutschen Astronom Johannes Kepler (1571 – 1630, rechts; Bildquelle: Wikipedia), der Planeten im Sonnensystem untersuchte. Er wertete die Daten seines dänischen Kollegen und Zeitgenossen Tycho Brahe (1546 - 1601) aus. Damals wurde einfache optische Linsenteleskope zur astronomischen Beobachtung verwendet, die dem Prototyp, den der Holländer Hans Lipperhey (1570 - 1619) erfand und den Galileo Galilei (1564 - 1642) weiterentwickelte, sehr ähnlich waren. Diese kleinen Fernrohre dienten vor allem der Mond- und Planetenbeobachtung.

Kepler hatte drei Gesetze der Himmelsmechanik rein empirisch gefunden. Eine theoretische Herleitung dieser später Kepler-Gesetze genannten Gesetzmäßigkeiten wurde mit der Newton'schen Gravitationstheorie möglich. Die drei Gesetze lauten:

- Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- Die Verbindungslinie Planet - Sonne („Fahrstrahl“) überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleich große Flächen.
- Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse der Ellipse ihrer jeweiligen Bahn.

In dieser Aufgabe interessiert uns besonders das 3. Kepler'sche Gesetz, denn es ist von solcher Allgemeingültigkeit, dass wir es benutzen können, um mehr über das supermassereiche Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße zu lernen. In ungefähr 26.000 Lichtjahren Entfernung vom Sonnensystem in Richtung des Tierkreiszeichens Schütze (*Sagittarius*, *Sgr*) befindet sich das Zentrum unserer scheibenförmigen Heimatgalaxie, der Milchstraße.

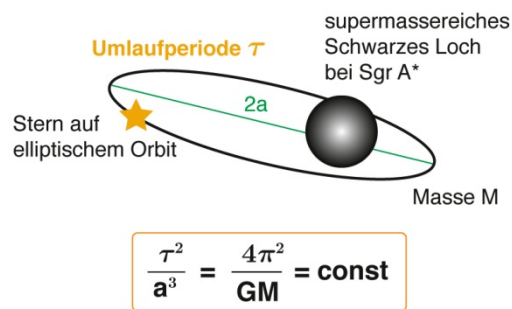
Mit hochauflösenden Teleskopen ist es möglich Sterne zu sehen, die um dieses Zentrum kreisen. Das 3. Kepler-Gesetz erlaubt es uns, die Masse  $M$  zu bestimmen, um die Sterne kreisen. Dazu müssen wir nur die Halbachse  $a$  der ellipsenförmigen Sternbahn wissen und die dazugehörige Umlaufzeit  $\tau$  (siehe Skizze oben; Bildquelle: Exzellenzcluster Universe). In der dargestellten Gleichung gibt es sonst nur Konstanten: die Kreiszahl  $\pi = 3,1415\dots$  und die Newton'sche Gravitationskonstante  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

Astronomen vom Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik<sup>[1]</sup> geben für einen Stern namens S2, der um das Zentrum namens Sgr A\* kreist folgende Werte an:

Umlaufzeit  $\tau = 15,2$  Jahre

Halbachse  $a = 5,5$  Lichttage

Berechne daraus die Zentralmasse  $M$  in Einheiten der Sonnenmasse  $1 M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ .



$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const}$$

### LÖSUNG:

Zunächst rechnen wir die Angaben in das Système International („SI-Einheiten“ wie Meter, Sekunde etc.) um.

Umlaufzeit  $\tau = 15,2$  Jahre  $= 15,2 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s} = 4,79 \times 10^8 \text{ s}$

Halbachse  $a = 5,5$  Lichttage  $= 5,5 \times c \times 24 \times 3600 \text{ s} = 1,43 \times 10^{14} \text{ m}$

(mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c = 300.000 \text{ km/s}$ )

Die angegebene Gleichung stellen wir nach der Masse  $M$  um und setzen alle Zahlenwerte ein:

$$\begin{aligned} M &= 4\pi^2 a^3 / (G \tau^2) = 4\pi^2 \times (1,43 \times 10^{14} \text{ m})^3 / [6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \times (4,79 \times 10^8 \text{ s})^2] \\ &= 7,54 \times 10^{36} \text{ kg} = 3,79 \times 10^6 M_{\odot} \end{aligned}$$

Innerhalb der Sternbahn von S2 (also innerhalb eines Volumens von nur wenigen Lichttagen Durchmesser, das nicht viel größer ist als unser Sonnensystem) befindet sich eine enorm große Masse von ungefähr 4 Mio. Sonnenmassen. So viel Masse auf so wenig Raum kann nur durch ein Schwarzes Loch erklärt werden. Im Herzen unserer Milchstraße sitzt ein supermassereiches Schwarzes Loch.

**Anmerkung:** Eine sorgfältige Diskussion zur Interpretation, ob sich im Zentrum der Milchstraße ein Schwarzes Loch oder ein anderer Typ eines kompakten Objekts (Bosonenstern, Fermionenstern, Gravastern etc.) befindet, findet man im Buch „Schwarze Löcher – Die dunklen Fallen der Raumzeit“ von Andreas Müller (Spektrum Akademischer Verlag, 2009; ISBN: 978-3-8274-2070-1)

**Quelle [1]:** Schödel et al., Nature Vol. 419, 694, 2002

## Aufgabe 5) Akkretion und Eddington-Leuchtkraft

Akkretion bezeichnet den Vorgang des Materie-Aufsammelns bei kosmischen Körpern. Der "Motor" dafür ist die Gravitation. In der Akkretionsphysik wird untersucht, welche Akkretionsflüsse sich ausbilden und auch wie viel Materie pro Zeit in das aufsammlende Objekt stürzen. Letzteres wird als *Akkretionsrate* bezeichnet und hat die Dimension einer Masse pro Zeit. Es stellt sich heraus, dass die Akkretionsrate einer der wichtigsten Parameter in der Akkretionsphysik ist. Denn sie reguliert den Materieeinfall (die "Fütterung") einerseits und die Leuchtkraft des Akkretionsflusses andererseits. Wird das Zentralobjekt zu sehr gefüttert (hohe Akkretionsrate), nimmt auch die Leuchtkraft des Akkretionsflusses so sehr zu, dass der Strahlungsdruck die Fütterung bremst. Um dieses Gleichgewicht soll es hier gehen.

Betrachtet man ein Plasmaelement im Akkretionsfluss, so wird dieses aufgrund seiner Masse von der Gravitation zum Zentralobjekt beschleunigt. Die Masse des Plasmaelements wird vor allem durch die Anzahl der Protonen darin bestimmt (Elektronen leisten nur einen geringen Beitrag zur Masse des Plasmaelements und können vernachlässigt werden). Elektromagnetische Strahlung, die in dem heißen Plasma entsteht, wird über Thomson-Streuung an den Elektronen im Plasmaelement gestreut, so dass ein Strahlungsdruck auf das Plasmaelement nach außen wirkt. Aus der Gleichgewichtsbedingung von Gravitations- und Strahlungsdruck folgt die **Eddington-Leuchtkraft**:

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi G M m_p / \sigma_T = 1,3 \times 10^{46} \text{ erg/s} \times (M / 10^8 M_{\odot})$$

mit

$G$ : Gravitationskonstante

$M$ : Masse des Schwarzen Lochs

$m_p$ : Protonenmasse

$c$ : Vakuumlichtgeschwindigkeit

$\sigma_T$ : Thomson-Querschnitt für Streuung

Astrophysiker verwenden das cgs-System und geben Leuchtkräfte, die die Dimension einer Leistung haben, in erg/s an. Es gilt:  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ .

Die Leuchtkraft ist die der Beobachtung zugängliche Größe. Unter Annahme einer Effizienz  $\varepsilon$ , wie viel Ruhemasse in Leuchtkraft umgewandelt wird, folgt aus der Leuchtkraft eine Massenakkretionsrate  $\dot{M}$ :

$$L = \varepsilon \dot{M}$$

Damit folgt die **Eddington-Akkretionsrate** zu:

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = 20 M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \times (0,1 / \varepsilon) \times (L / 10^{47} \text{ erg/s}) \text{ in der Einheit "Sonnenmassen pro Jahr"}.$$

Die Effizienz  $\varepsilon$  ist abhängig von der Akkretion und dem Typus des akkretierenden Objekts. Ein Standardwert aus der Literatur für einen optisch dicken Akkretionsfluss ist  $\varepsilon = 0,1$ . Für ein schnell rotierendes Schwarzes Loch (Kerr-Lösung) können Maximalwerte von  $\varepsilon = 0,42$  erreicht werden, d.h. ein derartiges Schwarzes Loch ist der effizienteste Weg (42 %) zur Umwandlung von Ruhemasse in Strahlung. Dahingegen ist die Kernfusion im Inneren von Sternen mit etwa 0,7 % weitaus weniger effizient.

**Achtung:** Diese Überlegungen in der Akkretionsphysik gelten nur für den Spezialfall kugelsymmetrischer Akkretion. Bei Akkretionsscheiben, die axialsymmetrisch sind, kann es zu Akkretionsraten über der Eddington-Akkretionsrate kommen ("Super-Eddington-Akkretion").

- a) Berechne die Eddington-Leuchtkraft für ein stellares Schwarze mit 15 Sonnenmassen, das sich in einem Röntgendoppelsternsystem befindet.
- b) Berechne die Eddington-Leuchtkraft für einen leuchtkräftigen Quasar, der ein zentrales, supermassereiches Schwarzes Loch mit 500 Mio. Sonnenmassen beherbergt.
- c) Berechne die Eddington-Akkretionsrate für den Quasar aus Teilaufgabe (b) unter der Annahme, dass er mit einer Effizienz von 10 % akkretiert.
- d) Wie groß ist die Lebensdauer des Quasars aus Teilaufgabe (b), falls er durchgehend mit der Eddington-Akkretionsrate akkretiert?

## LÖSUNGEN:

$$\text{a) } L_{\text{Edd}} = 4\pi G M m_p / \sigma_T = 1,3 \times 10^{46} \text{ erg/s} \times (15 M_{\odot} / 10^8 M_{\odot}) = 1,95 \times 10^{39} \text{ erg/s}$$

$$\text{b) } L_{\text{Edd}} = 4\pi G M m_p / \sigma_T = 1,3 \times 10^{46} \text{ erg/s} \times (500 \times 10^6 M_{\odot} / 10^8 M_{\odot}) = 6,5 \times 10^{46} \text{ erg/s}$$

$$\text{c) } \dot{M}_{\text{Edd}} = 20 M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \times (0,1 / 0,1) \times (6,5 \times 10^{46} \text{ erg/s} / 10^{47} \text{ erg/s}) = 13 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

$$\text{d) } t_{\text{Quasar}} = M / \dot{M}_{\text{Edd}} = 500 \times 10^6 M_{\odot} / 13 M_{\odot} \text{ yr}^{-1} = 38,5 \text{ Mio. Jahre}$$

Die Lebensdauer dieses Quasars ist mit 38,5 Millionen Jahren außerordentlich gering, wenn man sie z.B. mit dem Alter der Sonne von rund 4,5 Milliarden Jahren vergleicht. Der Aktivitätszyklus aktiver Galaxien ist für diesen Fall recht kurz.

## Aufgabe 6) Überlichtschnelle Jets von Aktiven Galaxien

Jets sind Materieströme, die im Zentrum eines aktiven Galaxienkerns, z. B. einem radiolauten Quasar oder einem Blazar erzeugt werden. Es gibt im Wesentlichen zwei konkurrierende Modelle zur Bildung von Jets, die entweder weiter außen in der Akkretionsscheibe entstehen (Blandford-Payne-Modell) oder die direkt vor dem Ereignishorizont eines schnell rotierenden Schwarzen Lochs gebildet werden (Blandford-Znajek-Modell). Astronomen nehmen weiterhin an, dass Jets immer paarweise gebildet werden und immer senkrecht auf der Akkretionsscheibe stehen (dazu mehr im Web-Lexikon unter [www.astronomiewissen.de](http://www.astronomiewissen.de))

Nach der Bildung der Jets in der Zentralregion fließt die Jetmaterie nach außen und wird durch elektrische und magnetische Felder beschleunigt. Am Ende ist der Jetstrahl typischerweise gebündelt und ist fast so schnell wie das Licht. Typische Lorentzfaktoren liegen zwischen 1 und 10.

Messungen von Jetgeschwindigkeiten (beispielsweise bei Blazaren) haben erstaunlicherweise auch Geschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit ergeben (engl. superluminal motion)! Dies sieht zunächst nach einem Widerspruch zur Speziellen Relativitätstheorie (SRT) aus, kann aber leicht erklärt werden: Dieses mysteriöse Phänomen kommt nämlich nur dann zustande, wenn der betrachtete Jet relativistisch ("fast so schnell wie das Licht") ist und fast genau auf den Beobachter zeigt. Die Astronomen beschreiben das so, dass der Jet dann einen kleinen Neigungswinkel (Inklination) aufweist. Eine Inklination von  $0^\circ$  bedeutet üblicherweise, dass der Jet exakt auf den Beobachter zeigt;  $90^\circ$  bedeutet, dass der Jet senkrecht zur Sichtlinie des Beobachters ('von links nach rechts' oder 'von rechts nach links') verläuft. Mit einer kleinen Rechnung, die nur auf der SRT und der Geometrie dieser Situation beruht kann man zeigen, dass typischerweise bei Inklinationen kleiner als etwa  $10^\circ$  ein (für den Beobachter!) überlichtschneller Jet resultieren kann.

- a) Fertige ein Skizze zur Geometrie des Problems an.
- b) Berechne wie weit sich der Knoten nach einer Zeit  $t_0$  in Richtung zum Beobachter bewegt hat.
- c) Und wie weit hat sich der Knoten nach einer Zeit  $t_0$  in einer Richtung senkrecht zum Beobachter bewegt?
- d) Welche Zeit vergeht im Beobachtersystem zwischen Emission des Knotens im Kern und Sichtung des Knotens am Punkt P? **Tipp:** Verwende eine Näherung für kleine Winkel.
- e) Berechne nun die scheinbare Geschwindigkeit des Knotens in Richtung senkrecht zum Beobachter. Was fällt auf?
- f) Berechne die scheinbare Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit für die folgenden astronomischen Quellen:

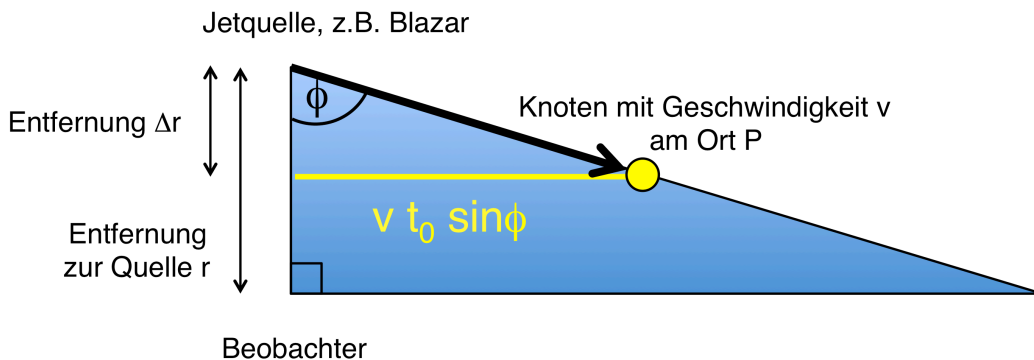
Quasar 3C273:  $\beta = v/c = 0,996$ ,  $\phi = 6^\circ$ ;

Blazar CTA 102:  $\beta = v/c = 0,999$ ,  $\phi = 2,6^\circ$ .

-----

## LÖSUNGEN:

a)



Das geht so: Wir nehmen an, dass eine Jetquelle, z.B. ein Quasar oder ein Blazar in einer Entfernung  $r$  einen Knoten zum Zeitpunkt  $t$  aus seinem Kern aussenden möge. Der Knoten bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  von der Quelle weg. Nach einer Zeit  $t_0$  hat der Knoten einen Weg  $\Delta r$  in Richtung zum Beobachter zurückgelegt. Der Beobachter befindet sich unter einem Winkel  $\phi$  relativ zur Bewegungsrichtung des Knotens. Die Abbildung oben illustriert die Geometrie von Quelle, Knoten und Beobachter.

b) Aus elementaren trigonometrischen Überlegungen folgt, dass sich der Knoten nach der Zeit  $t_0$  um die Strecke  $\Delta r$  auf den Beobachter zu bewegt hat (radiale Richtung):

$$\Delta r = v t_0 \cos \phi.$$

c) Senkrecht zur Sichtlinie (transversal) hat sich der Knoten um die Strecke  $\Delta d$  von der Quelle entfernt. Für diese Strecke gilt:  $\Delta d = v t_0 \sin \phi$ .

d) Aus der Sicht des Beobachters sieht er den Knoten im Kern entstehen, wenn das Licht den Weg von der Quelle zum Beobachter zurückgelegt hat, also nach einer Zeit  $t_1 = r/c$  mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$ .

Der Beobachter sieht den Knoten am Ort P, wenn das zum Zeitpunkt  $t_0$  dort emittierte Licht, den verbleibenden Weg bis zum Beobachter zurückgelegt hat.

Wie lang ist diese verbleibende Strecke? Dazu verwenden wir eine Näherung. Denn der Knoten wird so nah an der Quelle beobachtet, dass der Lichtweg vom Punkt P zum Beobachter im Prinzip parallel zur Sichtlinie ist (anders gesagt: der Winkel  $\phi$  ist sehr klein). Der verbleibende Lichtweg hat damit eine Länge  $L \approx r - \Delta r$ .

Den Beobachter erreicht das Licht damit nach einer Zeit

$$t_2 = t_0 + L/c = t_0 + (r - \Delta r)/c = t_0 + (r - v t_0 \cos \phi)/c$$

Zwischen der Beobachtung der Emission im Kern des Quasars (oder Blazars) und der Beobachtung, dass der Knoten den Punkt P erreicht vergeht (im Beobachtersystem) die Zeit

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_0 + (r - v t_0 \cos \phi)/c - r/c = t_0 - (v t_0 \cos \phi)/c = t_0 (1 - \beta \cos \phi),$$

mit dem Faktor  $\beta = v/c$ , wie er in der Relativitätstheorie verwendet wird (Geschwindigkeit in Einheiten der Vakuumlichtgeschwindigkeit).



e) Die **scheinbare Geschwindigkeit in transversaler Richtung** (app = apparent) berechnet sich zu

$$v_{\text{app}} = \Delta d / \Delta t = v \cdot t_0 \sin \phi / [t_0 (1 - \beta \cos \phi)]$$

Mit der Definition  $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$  lässt sich das kompakt schreiben gemäß

$$\beta_{\text{app}} = \beta \sin \phi / (1 - \beta \cos \phi)$$

Wohingegen  $\beta$  nur zwischen 0 und 1 variiert, weil sich ein Objekt maximal so schnell bewegen kann, wie das Licht, kann die scheinbare transversale Geschwindigkeit  $\beta_{\text{app}}$  größer werden als 1! Dies ist der **Effekt der scheinbaren Überlichtgeschwindigkeit** (engl. *superluminal motion*), der nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie steht. Denn intrinsisch bewegt sich der Knoten langsamer als das Licht.

f) Wertebeispiele von astronomischen Jetquellen:

Quasar 3C273:  $\beta = 0,996$ ,  $\phi = 6^\circ$ . Daraus folgt:  $\beta_{\text{app}} = 11$

Blazar CTA 102:  $\beta = 0,999$ ,  $\phi = 2,6^\circ$ . Daraus folgt:  $\beta_{\text{app}} = 22$

#### Quellen und weiterführende Literatur:

- Wikipedia: [http://de.wikipedia.org/wiki/Überlichtgeschwindigkeit\\_-\\_Scheinbar\\_C3.BCberlichtschnelle\\_Objekte\\_in\\_der\\_Astronomie](http://de.wikipedia.org/wiki/Überlichtgeschwindigkeit_-_Scheinbar_C3.BCberlichtschnelle_Objekte_in_der_Astronomie)
- Christian M. Fromm (Max-Planck-Institut für Radioastronomie, Preisträger des Doktorandenpreises 2014 der Astronomischen Gesellschaft) et al. zum überlichtschnellen Jet in der Quelle CTA 102: <http://arxiv.org/pdf/1211.3606.pdf>
- Überlichtschneller Jet in 3C 120: Gomez et al. <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0110133.pdf>

#### Zusatzinformationen

Links und Tools zum Thema

- Schwarze Löcher  
[http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/astro\\_sl.html](http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/astro_sl.html)
- MPE-Website zum Schwarzen Loch im Galaktischen Zentrum  
<http://www.mpe.mpg.de/ir/GC>
- Chandra Education Homepage  
[http://chandra-ed.harvard.edu/3c273/time\\_machine.html](http://chandra-ed.harvard.edu/3c273/time_machine.html)
- NASA Active Galaxy Education Unit  
<http://fermi.sonoma.edu/teachers/agn.php>
- Gallery of animations and images  
[http://www.iaa.es/~jlgomez/Jose\\_L.\\_Gomez/Animations.html](http://www.iaa.es/~jlgomez/Jose_L._Gomez/Animations.html)
- Planck-Mission der ESA  
<http://sci.esa.int/planck/>
- AGN Spectroscopy  
<https://www.noao.edu/education/arbse/arpd/agn>
- NASA/IPAC Extragalactic Database (NED)  
<http://ned.ipac.caltech.edu/>

Liste astronomischer Institute in Deutschland, die sich mit AGN-Forschung befassen (Auswahl)

AG-ESO-Fortbildung, Schwarze Löcher, Rechenaufgaben, 9

- Exzellenzcluster Universe der Technischen Universität München  
<http://www.universe-cluster.de>
- Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik (MPE), Garching bei München  
<http://www.mpa-garching.mpg.de/>
- Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik (MPE), Garching bei München  
<http://www.mpe.mpg.de/index>
- Europäische Südsternwarte (ESO), Garching bei München  
<http://www.eso.org>
- Max-Planck-Institut für Astronomie, Heidelberg (MPIA)  
<http://www.mpia.de>
- Landessternwarte Königstuhl (LSW), Heidelberg  
<http://www.lsw.uni-heidelberg.de/>
- Institut für Astronomie und Astrophysik Tübingen (IAAT), Universität Tübingen  
<http://astro.uni-tuebingen.de/>
- Lehrstuhl für Astronomie, Universität Würzburg  
<http://www.astro.uni-wuerzburg.de/de>
- Leibniz-Institut für Astrophysik Potsdam (AIP)  
<http://www.aip.de/de>
- Max-Planck-Institut für Radioastronomie (MPIfR), Bonn  
<http://www.mpifr-bonn.mpg.de/>
- Argelander-Institut für Astronomie (AlfA), Universität Bonn  
<http://www.astro.uni-bonn.de>
- Hamburger Sternwarte  
<http://www.hs.uni-hamburg.de>

#### **Autoren der Rechenaufgaben:**

Dr. Andreas Müller (Excellence Cluster Universe); Astrophysiker und Scientific Manager,  
Mitglied im Bildungsausschuss der Astronomischen Gesellschaft.

#### **Kontaktdaten:**

Dr. Andreas Müller  
Scientific Manager, Vice General Manager  
Excellence Cluster Universe  
andreas.mueller@universe-cluster.de  
089 - 35831 - 7104 , [www.universe-cluster.de](http://www.universe-cluster.de)

#### **Nachschlagewerk mit 550 Astro-Begriffen:**

[www.astronomiewissen.de](http://www.astronomiewissen.de)