Aktivität 3

Ableitung der Lane-Emden-Gleichung

Ausgangspunkt: Ein (quaderförmiges) Volumenelement mit Dicke Δr in einem Abstand r vom Sternzentrum soll im Kräftegleichgewicht sein, d.h. die Auftriebskraft und die Gravitationskraft auf das Volumenelement sollen sich aufheben:

$$F_{Oben} + F_{Grav} - F_{Unten} = 0$$

Benutze den Druck und die obere bzw. untere Begrenzungsfläche A des Volumenelements um F_{Oben}und F_{Unten} umzuformen. Für F_{Grav} setzte das Gravitationsgesetz von Newton an, wobei im Volumenelement die Dichte ρ herrschen soll und die Gravitation von der Sternmasse M innerhalb des Radius r ausgeübt wird.

Dividiere beide Seiten durch A, da die obere und untere Begrenzungsfläche gleich ist. Bedenke, dass das Volumen die Dicke Δr besitzt.

Dividiere beide Seiten durch Δr und lasse Δr gegen Null gehen (aus dem Differenzenquozient wird der Differenzialquozient). Nutze die abkürzende Schreibweise für den Differenzialquozienten.

Multipliziere beide Seiten mit $\frac{r^2}{\rho}$ um den zweiten Summanden von anderen radiusabhängigen Größen zu bereinigen.

Die Masse errechnet sich durch die Integration $\int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr$. Ersetze die Masse durch diesen Ausdruck

$$P_{Oben} \cdot A + G\frac{\rho \cdot V \cdot M}{r^2} - P_{Unten} \cdot A = 0$$

$$P_{Oben} + G\frac{\rho \cdot \Delta r \cdot M}{r^2} - P_{Unten} = 0$$

$$P' + G\frac{\rho \cdot M}{r^2} = 0$$

$$\frac{r^2}{\rho} P' + G \cdot M = 0$$

$$\frac{r^2}{\rho} P' + G \cdot \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr = 0$$

Um dieser Integration aus dem Weg zu gehen wird die Gleichung nochmals abgeleitet. Nach dem HDI entspricht die Ableitung der Integration dem Integranden.

Bringe den zweiten Summanden auf die rechte Seite und Teile durch r^2.

Nun wird der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte hergestellt. Dazu wird eine sog. Polytropengleichung aufgestellt, dessen Vorfaktor K und Exponent nach dem Zustand des betrachteten Gases eingestellt werden können:

$$P(\rho) = K \cdot \rho^{\frac{n+1}{n}}$$

mit dem Polytropenindex n
Schreibe die Gleichung mit der Ersetzung des Drucks durch die Polytropengleichung.

Wende die Kettenregel auf die innere Ableitung an und bedenke, dass auch die Dichte eine Radiusabhängigkeit besitzt. Ziehe alle radiusunabhängigen Größen aus der verbleibenden äußeren Ableitung. Dividiere beide Seiten durch $4\pi G$.

Für die Dichte wird nun eine Substitution eingeführt, die die weitere Verarbeitung der Gleichung erleichtert: $\rho = \rho_c \cdot \theta^n$ wobei ρ_c die zentrale Dichte des Sterns darstellt. Einsetzen der Substitution führt auf:

Auflösen der Exponenten, Zusammenfassen und herausziehen von allen radiusunabhängigen Größen ergibt:

$$\left(\frac{r^2}{\rho}P'\right)' + G \cdot 4\pi\rho r^2 = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{\rho}P'\right)' = -G \cdot 4\pi\rho$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{r^2}{\rho}\left(K \cdot \rho^{\frac{n+1}{n}}\right)'\right]' = -G \cdot 4\pi\rho$$

$$\frac{(n+1) \cdot K}{4\pi G \cdot n}\frac{1}{r^2}\left[r^2 \cdot \rho^{\frac{1-n}{n}} \cdot \rho'\right]' = -\rho$$

$$\frac{(n+1) \cdot K}{4\pi G \cdot n}\frac{1}{r^2}\Big[r^2 \cdot (\rho_c \cdot \theta^n)^{\frac{1-n}{n}}$$
$$\cdot (\rho_c \cdot \theta^n)'\Big]' = -\rho_c \cdot \theta^n$$

$$\frac{(n+1) \cdot K}{4\pi G \cdot n}\rho_c^{\frac{1-n}{n}}\frac{1}{r^2}[r^2 \cdot \theta^{1-n} \cdot (\theta^n)']'$$
$$= -\theta^n$$

Anwendung der Kettenregel auf die innere Ableitung.

Zur Vereinfachung wird der Term vor der äußeren Ableitung substituiert: $\alpha^2 = \frac{(n+1)\cdot K}{4\pi G}{\rho_c}^{\frac{1-n}{n}}$

Anwendung der Kettenregel:

und schließlich Auflösen nach θ''

führt auf das Endergebnis:

$$\theta'' = -\frac{2}{r}\theta' - \frac{\theta^n}{\alpha^2}$$

$$\frac{(n+1)\cdot K}{4\pi G\cdot n}\rho_c^{\frac{1-n}{n}}\frac{1}{r^2}[r^2\cdot\theta^{1-n}\cdot n\cdot\theta^{n-1}\cdot\theta']'=-\theta^n$$

$$\frac{(n+1)\cdot K}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1-n}{n}}\frac{1}{r^2}[r^2\cdot\theta']'=-\theta^n$$

$$\frac{\alpha^2}{r^2}[r^2\cdot\theta']'=-\theta^n$$

$$\alpha^2\theta''+\frac{2\alpha^2}{r}\theta'=-\theta^n$$

$$\theta''=-\frac{2}{r}\theta'-\frac{\theta^n}{\alpha^2}$$

Numerisches Lösen mit Hilfe des Newton-Verfahren:

$$f'(r) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(r+\Delta r) - f(r)}{\Delta r}$$

Wird angenähert als:

$$f'(r) \cdot \Delta r = f(r+\Delta r) - f(r)$$

Analog:

$$f''(r) \cdot \Delta r = f'(r+\Delta r) - f'(r)$$

$$\rightarrow f'(r+\Delta r) = f'(r) + f''(r) \cdot \Delta r$$

Einsetzen von $f'' = -\frac{2}{r} f' - \frac{f^n}{\alpha^2}$

$$f'(r+\Delta r) = f'(r) + \left[-\frac{2}{r} \cdot f'(r) - \frac{(f(r))^n}{\alpha^2}\right] \cdot \Delta r$$

Für die Randbedingungen im Zentrum des Sterns gelten:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

Beim weißen Zwerg gilt im klassischen Fall die Zustandsgleichung:

$$P_{Kl} = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} \cdot \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi}\right)^{\frac{5}{3}} = 2{,}34 \cdot 10^{-38} \frac{Pa}{m_e^5} \cdot (n_e)^{5/3}$$

Um von der Dichte auf die Elektronendichte zu kommen, müssen die Massenanteile bekannt sein. Im weißen Zwerg spielen nur die Massenanteile an Wasserstoff X, Helium Y und Kohlenstoff C eine Rolle. Teilt man die Dichte durch die Protonmasse, erhält man die Anzahl an Nukleonen in einem Kubikmeter Sternmaterie. Würde das gesamte Material aus Wasserstoff bestehen, hätte man dmit die Wasserstoffteilchendichte. Würde das gesamte Material aus Helium bestehen, müsste die Teilchenzahldichte durch 4 geteilt werden, da ein Heliumkern aus 4 Nukleonen besteht. Im Fall von Kohlenstoff ist eine Division durch 12 notwendig. Bei einer Mischung ergibt sich für die Atomkernzahl- oder Ionendichte:

$$n_{ion} = \frac{\rho}{m_P}\left(X + \frac{Y}{4} + \frac{C}{12}\right)$$

Um auf die Elektronenzahldichte zu kommen, muss berücksichtigt werden, dass Wasserstoff ein Elektron, Helium zwei Elektronen und Kohlenstoff 6 Elektronen zur Verfügung stellt:

$$n_e = \frac{\rho}{m_P}\left(X \cdot 1 + \frac{Y}{4} \cdot 2 + \frac{C}{12} \cdot 6\right)$$

Damit ergibt sich die Zustandsgleichung:

$$P(\rho) = 2{,}34 \cdot 10^{-38} \frac{Pa}{m_e^5} \cdot \left[\frac{1}{m_P}\left(X + \frac{Y}{2} + \frac{C}{2}\right)\right]^{5/3} \rho^{5/3}$$

Anlegen der Excel-Tabelle:

In der Spalte B befinden sich wichtige Größen und Konstanten:

B3	R des Sternzentrums	$1{,}0 \cdot 10^{-5} m$
B4	Schrittweite	$2000\ m$
B5	Randbedingung θ für R=0	1
B6	Randbedingung θ' für R=0	0
B9	Protonenmasse	$1{,}6726 \cdot 10^{-27} kg$
B10	Gravitationskonstante	$6{,}6730 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
B11	Radius der Sonne	$6{,}96 \cdot 10^{8} m$
B12	Masse der Sonne	$1{,}989 \cdot 10^{30} kg$
B15	Polytropenexponent	1,5 führt auf $\rho^{5/3}$
B17	Zentraldichte	Frei wählbar
B18	Massenanteil Wasserstoff	Frei wählbar
B19	Massenanteil Helium	Frei wählbar
B20	Massenanteil Kohlenstoff	Frei wählbar
B21	Teilchendichte Wasserstoff	$\frac{\rho}{m_p} \cdot X = \frac{B17}{B9} \cdot B18$
B22	Teilchendichte Helium	$\frac{\rho}{m_p} \cdot Y = \frac{B17}{B9} \cdot B19$
B23	Teilchendichte Kohlenstoff	$\frac{\rho}{m_p} \cdot C = \frac{B17}{B9} \cdot B20$
B25	Ionendichte	Summe aller Teilchendichten
B26	Elektronendichte	$B21 \cdot 1 + B22 \cdot 2 + B23 \cdot 6$
B28	Vorfaktor der Polytropengleichung	$2{,}34 \cdot 10^{-38} \cdot \left[\frac{B18 + \frac{B19}{2} + \frac{B20}{2}}{B9}\right]^{5/3}$
B29	Alpha aus der Substitution	$\sqrt{\frac{(B15+1) \cdot B28}{4\pi \cdot B10} \cdot B17^{\frac{1-B15}{B15}}}$
B31	Sternradius in m	Maximum aus der Spalte des Sternradius J
B32	Sternmasse in kg	Maximum aus der Spalte der Masse L
B34	Sternradius in Sonnenradien	$\frac{B31}{B11}$
B35	Sternmasse in Sonnenmassen	$\frac{B32}{B12}$

In Spalte F steht der Radius bzw. der Abstand dieser Zelle vom Sternmittelpunkt:

Zelle	Formel
F2	B3
F3	F2+B$4

In Spalte G steht der Wert für θ bei entsprechendem Radius:

G2	B5
G3	G2+H3*B$4

In Spalte H steht der Wert für θ' bei entsprechendem Radius:

H2	B6
H3	$H2 + \left(-\frac{2}{F3} \cdot H2 - \frac{G2^{B\$15}}{B\$29^2}\right) \cdot B\$4$

In Spalte I wird untersucht, ob G2 noch größer als Null ist, also immer noch innerhalb des Sternradius gerechnet wird. Ist dies der Fall, dann steht in dieser Zelle eine 1 ansonsten eine Null.

In Spalte J wird der Radius aus der Spalte F übernommen, falls die Zelle immer noch im Sterninneren liegt. Ansonsten wird der Wert aus der Zelle darüber genommen. Dadurch wird gewährleistet, dass in dieser Spalte nur r-Werte vorkommen, die innerhalb des Sternradius liegen. Die Abfrage nach dem Maximalwert aus dieser Spalte führt automatisch zum Sternradius.

In Spalte K wird die reale Dichte im Abstand r vom Sternzentrum bestimmt: $K = B\$17 \cdot G^{B\$15}$

In Spalte L wird die Masse des Sterns bis zum Abstand r vom Sternzentrum berechnet:

L2	$\frac{4}{3}\pi \cdot K2 \cdot F2^3$
L3	$L2 + \frac{4}{3}\pi \cdot K3 \cdot F3^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot K3 \cdot F2^3$